Universidade Federal Rural de Pernambuco

Bacharelado em Sistemas de Informação

Disciplina: Matemática Discreta - Turmas SI1 e SI2

Professores: Marcelo Gama / Silvana Bocanegra

TESTE 3: Somas, indução, recursão, divisibilidade e aritmética modular

Data: 04.09.2013

Nome: ____ **Nota:**____

Atenção: Escolha apenas duas questões do grupo I e três do grupo II
Só serão corrigidas as questões selecionadas

Grupo I: Somas, indução e recursão - Questões Escolhidas: ( ) ( )

1. Considere a sequência definida recursivamente por $a_n = 2a_{n-1} + 1$, com $a_0 = 1$. Encontre uma fórmula fechada para a_n. Prove a validade dessa fórmula por indução.

2. Uma fábrica de automóveis produz carros a uma taxa crescente, da seguinte forma: No primeiro mês apenas um carro é produzido. No segundo mês são produzidos dois carros. No terceiro mês são produzidos 3 carros. No quarto mês são produzidos 4 carros e assim por diante.

   (a) Encontre uma relação de recorrência que expresse o número de carros produzido no n-ésimo mês em função do número de carros produzidos no mês anterior.

   (b) Quantos carros são produzidos no primeiro ano?

   (c) Encontre uma fórmula explícita para o número de carros produzidos nos primeiros n meses.

3. Prove, por indução, que

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Prove, por indução que o número $4^n - 1$ é sempre divisível por 3.

Grupo II : Divisibilidade e aritmética modular - Questões Escolhidas: ( ) ( )

5. Sejam a e b inteiros, ambos não nulos. Suponha que $a|b$ (a divide b) e que $b|a$ (b divide a). Prove que $a = b$ ou $a = -b$.
   Sugestão: O que significa, matematicamente, a afirmação $a|b$?

6. Em uma divisão de inteiros o *dividendo* é D, o *divisor* é d, o *quociente* é q e o *resto* é r.

   (a) Qual a relação matemática entre D, d, q e r?

   (b) Encontre q e r quando $D = -111$ e $d = -32$

   (c) Encontre todos os inteiros D que divididos por $d = 6$ deixam um resto que é o dobro do quociente.

7. Considere os números $a = 3457$ e $b = 521$. Vamos calcular o mdc desses números por dois processos ligeiramente diferentes para comparar as eficiências dos mesmos.

   (a) Calcule mdc(a,b) pelo método das divisões sucessivas (algoritmo de Euclides). Quantas divisões foram efetuadas?

(b) Calcule novamente mdc(a,b) por divisões sucessivas mas, nesse caso, em cada equação da forma $D = d \cdot q + r$, o número r não será necessariamente o resto da divisão e sim o *menor resto absuluto*, ou seja, *obrigatoriamente* deve estar no intervalo entre $-d/2$ (inclusive) e $d/2$. Exemplo: Não queremos $17 = 6 \cdot 2 + 5$ e sim $17 = 6 \cdot 3 - 1$ (5 é o resto mas -1 é o menor resto absoluto). Para dividir utilize *sempre* divisores positivos, trocando sinais se necessário. Quantas divisões foram efetuadas dessa vez?

(c) Explique, brevemente, o porquê de termos menos divisões quando utilizamos o segundo método?

8. O sistema internacional de numeração de livros ISBN (International Standard Book Numeber) foi desenvolvido para detectar, sempre que possível, erros de numeração na hora de fazer referência a qualquer livro, especialmente na hora de uma compra por meios eletrônicos. No sistema ISBN com 10 dígitos $x_1 x_2 \ldots x_{10}$, os 9 primeiros formam a numeração do livro. O décimo algarismo é o dígito verificador que pode ser calculado por

$$x_{10} \equiv \sum_{i=1}^{9} i \cdot x_i \pmod{11} \qquad \text{ou, de forma equivalente,} \qquad \sum_{i=1}^{10} i \cdot x_i \equiv 0 \pmod{11}$$

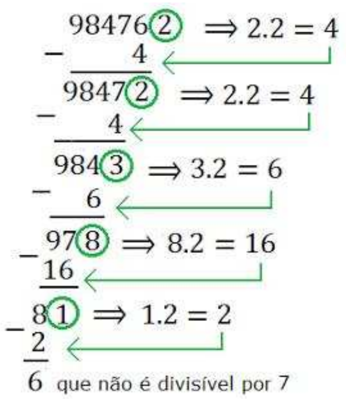
Caso o valor de x_{10} seja 10, usamos $x_{10} = X$.

(a) Calcule o dígito verificador do livro *Matemática discreta e suas aplicações*, de Kenneth H. Rosen, sabendo que seu ISBN é $857726036x_{10}$.

(b) O livro *Matemática discreta - Uma introdução*, de Edward D. Scheinerman, tem ISBN $852210x_7963$. Qual o valor do dígito x_7?

(c) É possível existir um livro cujo ISBN é 0262032844?

9. **(Critério de divisibilidade por 7)** O critério de divisibilidade por 7 serve de inspiração para infinitos outros critérios de divisibilidade. Vejamos como ele aplica quando queremos determinar se o número 984762 é divisível por 7:



Note que em cada passo multiplicamos o último algarismo do número reastante por 2, retiramos esse último algarismo do número em questão e subtraimos seu valor multiplicado por 2 do número restante. Vamos chamar $m = 2$ de *multiplicador*. O número m pode ser qualquer inteiro, positivo ou negativo, que seja solução da congruência $10m \equiv -1 \pmod 7$.

(a) Utilize a congruência $10m \equiv -1 \pmod n$ para calcular os multilicadores módulo $n = 11, 13, 17$.

(b) Determine se o número 816629 é ou não divisível por cada um dos números 11, 13 e 17, utilizando os respectivos multiplicadores.

Boa prova!